

TD. Probabilités et Statistiques Série 2

Exercice 1

Une urne contient cinq boules, deux qui portent le numéro 1 et trois qui portent le numéro 2. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne. On appelle coïncidence le fait de tirer une boule de numéro i au i -ème tirage, avec $i = 1, 2$.

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de coïncidences observées.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2

La fonction de répartition F d'une v.a. X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{1 \times 2} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 - \frac{1}{2 \times 3} & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ 1 - \frac{1}{n \times (n+1)} & \text{si } n < x \leq n+1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \end{cases}$$

- 1) Calculer les probabilités $p_n = \mathbb{P}(X = n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$

Exercice 3

On lance un dé. Soient X le numéro obtenu et $Y = 6 - X$.

Déterminer les lois de probabilité de X et Y

Exercice 4

Soient X et Y deux VARD à valeurs dans \mathbb{N} , a un réel telles que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{2^{i+j}}$$

- 1) Calculer a .
- 2) Déterminer les lois marginales de X et de Y . Que constatez-vous?
- 3) X et Y sont-elles des VARD indépendantes?

Exercice 5

Soit X une VARD telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et dont la loi de probabilité vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \frac{4}{n} f(n-1)$$

Déterminer la loi de probabilité de X .

Exercice 6

Soit X une v.a. de fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{3} & \text{pour } x \leq 0 \\ 1 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

La loi de X est-elle continue?

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Déterminer la fonction de répartition de X et en déduire la médiane de cette loi.
 - 2) Calculer $\mathbb{P}\{|X - 1| < x\}$ pour x réel quelconque.
-